Droite dans le plan - corrigés détaillées

Exercice 1

$\lambda = -3$ $\quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} + (-3) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -9 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ -4 \end{pmatrix}$

$\lambda = -2$ $\quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} + (-2) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3-6 \\ 2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -2 \end{pmatrix}$

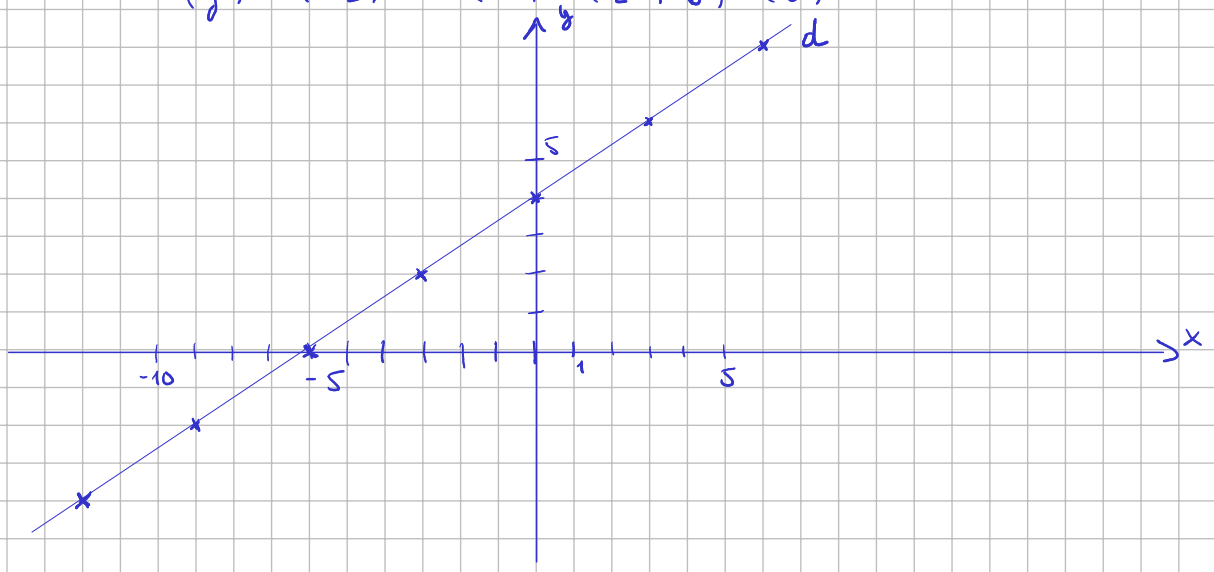
$\lambda = -1$ $\quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\lambda = 0$ $\quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\lambda = 1$ $\quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3+3 \\ 2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\lambda = 2$ $\quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3+6 \\ 2+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$

$\lambda = 3$ $\quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3+9 \\ 2+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$



Exercice 2

$A(5;4)$ $\quad d: \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5 = 2 + \lambda \\ 4 = -5 + 3\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 3 \\ 9 = 3\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 3 \\ \lambda = 3 \end{cases} \Rightarrow A \in d$$

Exercice 2 (suite)

$B(0;7)$ $\quad d: \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 = 2 + \lambda \\ 7 = -5 + 3\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -2 \\ 3\lambda = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -2 \\ \lambda = 4 \end{cases} \Rightarrow B \notin d$$

$C(7{,}5;\ 11{,}5)$ $\quad d: \begin{pmatrix} 7{,}5 \\ 11{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 7{,}5 = 2 + \lambda \\ 11{,}5 = -5 + 3\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 5{,}5 \\ 3\lambda = 16{,}5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 5{,}5 \\ \lambda = 5{,}5 \end{cases} \Rightarrow C \in d$$

Exercice 4

$\lambda \in \mathbb{R}$

a) $\vec{d} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+4 \\ 2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$

$d: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $B = (5;0)$ $\quad \vec{d} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$d: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad d: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

d) $\vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad d: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

e) $\vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\quad d: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

f) $\vec{d} = \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad d: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Exercice 5

a) $\vec{d} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{d}: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$

b) $$\begin{cases} -2 = 3 + 4\lambda \\ -8 = -2 + 2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5 = 4\lambda \\ -6 = 2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -\frac{5}{4} \\ \lambda = -3 \end{cases} \Rightarrow B \notin d$$

Exercice 6

$\vec{d} = \vec{OB} - \vec{OA} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\quad d: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$

Exercice 7

a) $d_1: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3}{-1} = -3$

$d_1: y = -3x + h$ $\quad$ Point d'ancrage $(2;1)$: $1 = -3 \cdot 2 + h \Rightarrow h = 1 + 6 = 7$

$d_1: y = -3x + 7$

b) $d_2: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\quad m = \frac{4}{4} = 1$

$d_2: y = x + h$ $\quad$ Pt d'ancrage: $(0;5)$ $\quad 5 = 0 + h \Rightarrow h = 5$

$d_2: y = x + 5$

c) $d_3: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\quad m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5}{6}$

$d_3: y = \frac{5}{6}x + h$ $\quad$ Pt ancrage: $(-4;3)$ $\quad 3 = \frac{5}{6} \cdot (-4) + h \Rightarrow h = 3 + \frac{10}{3} = \frac{19}{3}$

$d_3: y = \frac{5}{6}x + \frac{19}{3}$

Exercice 8

a) $d_1: y = 3x - 2$ $\quad d_1: 3x - y - 2 = 0$ $\quad \Rightarrow \vec{d} = \begin{pmatrix} -(-1) \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Pt d'ancrage: $x = 0 \Rightarrow y = -2$ $\quad A(0;-2)$

$d_1: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$

b) $d_2: 4x - 3y + 1 = 0$ $\quad \Rightarrow \vec{d} = \begin{pmatrix} -(-3) \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

Pt d'ancrage: $x = 0 \Rightarrow 4 \cdot 0 - 3y + 1 = 0 \Rightarrow 1 = 3y \Rightarrow y = \frac{1}{3}$ $\quad A\left(0; \frac{1}{3}\right)$

$d_2: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

c) $d_3: -2x + y + 3 = 0$ $\quad \Rightarrow \vec{d} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Pt d'ancrage: $x = 0 \Rightarrow -2 \cdot 0 + y + 3 = 0 \Rightarrow y = -3$ $\quad A(0;-3)$

$d_3: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Exercice 9

- $3x + 2y = 11$

  $2y = -3x + 11$

  $y = -\frac{3}{2}x + \frac{11}{2}$

- $\frac{9-x}{2} = \frac{y+8}{3}$

  $3(9-x) = 2(y+8)$

  $27 - 3x = 2y + 16$

  $11 - 3x = 2y$

  $\frac{11}{2} - \frac{3x}{2} = y$

- $6x + 4y - 22 = 0$

  $4y = -6x + 22$

  $y = -\frac{6}{4}x + \frac{22}{4}$

  $y = -\frac{3}{2}x + \frac{11}{2}$

- $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad m = \frac{3}{-2} = -\frac{3}{2}$ $\quad d: y = -\frac{3}{2}x + h$

  $-2 = -\frac{3}{2} \cdot 5 + h \Rightarrow h = -2 + \frac{15}{2} = \frac{-4+15}{2} = \frac{11}{2}$ $\Rightarrow d: y = -\frac{3}{2}x + \frac{11}{2}$

- $\begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = 1 - 3\lambda \end{cases}$ $\quad \begin{cases} \lambda = \frac{x-3}{2} \\ \lambda = \frac{1-y}{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{x-3}{2} = \frac{1-y}{3} \Rightarrow 3(x-3) = 2(1-y)$

  $\Rightarrow 3x - 9 = 2 - 2y \Rightarrow 3x - 11 = -2y \Rightarrow \frac{3}{2}x - \frac{11}{2} = -y \Rightarrow -\frac{3}{2}x + \frac{11}{2} = y$

Exercice 10

- Il faut que les vecteurs directeurs soient colinéaires.
- Le pt d'ancrage doit appartenir à l'autre droite

a) $2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{d_1}$ et $\vec{d_2}$ sont colinéaires.

$A(4;8)$ $\quad \begin{cases} 4 = 2 + 2\lambda \\ 8 = 3 + 5\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 = 2\lambda \\ 5 = 5\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = 1 \end{cases}$ $\quad A \in d_1$

Ce sont les mêmes droites.

b) $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \neq \theta \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ Ce ne sont pas les mêmes droites.

c) $2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{d_1}$ et $\vec{d_2}$ sont Colinéaires.

$A(7;0)$ $\quad \begin{cases} 7 = 5 + \lambda \\ 0 = -2 + \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 2 \\ \lambda = 2 \end{cases}$ $\quad A \in d_1 \Rightarrow$ Ce sont les mêmes droites

d) $2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{d_1}$ et $\vec{d_2}$ sont colinéaires.

$A(8;-2)$ $\quad \begin{cases} 8 = 2 + 3\lambda \\ -2 = 2 - 2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6 = 3\lambda \\ -4 = -2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 2 \\ \lambda = 2 \end{cases}$ $\quad A \in d_1 \Rightarrow$ Ce sont les mêmes droites.

Exercice 11

a) $d_1 : 3x + 2y - 1 = 0 \Rightarrow 2y = 1 - 3x \Rightarrow y_1 = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$

$d_2 : \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = -1 + 2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 - x = \lambda \\ \frac{y+1}{2} = \lambda \end{cases}$ $\quad 2 - x = \frac{y+1}{2} \Rightarrow 4 - 2x = y + 1 \Rightarrow y_2 = -2x + 3$

Les deux droites sont sécantes.

$-\frac{3}{2}x + \frac{1}{2} = -2x + 3$

$-3x + 1 = -4x + 6$

$x = 5$

$y = -2 \cdot 5 + 3 = -10 + 3 = -7$

$I(5; -7)$

b) $d_1 : 15x - 5y - 1 = 0 \Rightarrow 15x - 1 = 5y \Rightarrow y_1 = 3x - \frac{1}{5}$

$d_2 : 12x - 4y + 3 = 0 \Rightarrow 12x + 3 = 4y \Rightarrow y_2 = 3x + \frac{3}{4}$

Les deux droites sont parallèles, car elles ont la même pente, mais pas la même ordonnée à l'origine.

c) $d_1 : y = -\frac{2}{3}x + 3$

$d_2 : 7x - 12y - 9 = 0 \Rightarrow 7x - 9 = 12y \Rightarrow y_2 = \frac{7}{12}x - \frac{3}{4}$

Les deux droites sont sécantes

$-\frac{2}{3}x + 3 = \frac{7}{12}x - \frac{3}{4}$

$-8x + 36 = 7x - 9$

$45 = 15x \Rightarrow x = 3$

$y = -\frac{2}{3} \cdot 3 + 3 = -2 + 3 = 1$

$I(3; 1)$

d) $d_1 : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 - \lambda \end{cases} \Rightarrow$ $\quad x + y = 1 + 2 \Rightarrow x + y = 3 \Rightarrow y_1 = -x + 3$

$d_2 : x + y = 3 \Rightarrow y_2 = -x + 3$

Les deux droites sont confondues, car elles ont la même pente et la même ordonnée à l'origine.

e) $d_1 : 4x - 6y = 3 \Rightarrow 4x - 3 = 6y \Rightarrow y_1 = \frac{2}{3}x - \frac{1}{2}$

$d_2 : -2x + 3y = 5 \Rightarrow 3y = 2x + 5 \Rightarrow y_2 = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$

Les deux droites sont parallèles, car elles ont la même pente, mais pas la même ordonnée à l'origine.

Exercice 11 (suite)

f) d_1: $5x - 6y = -2 \Rightarrow 5x + 2 = 6y \Rightarrow y = \frac{5}{6}x + \frac{1}{3}$

d_2: $-3x + 4y = 8 \Rightarrow 4y = 3x + 8 \Rightarrow y = \frac{3}{4}x + 2$

Les deux droites sont sécantes.

$\frac{5}{6}x + \frac{1}{3} = \frac{3}{4}x + 2$

$10x + 4 = 9x + 24$

$x = 20$

$y = \frac{3}{4} \cdot 20 + 2 = 15 + 2 = 17$

$I(20; 17)$

Exercice 12

a) $\vec{d} = \vec{OB} - \vec{OA} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\quad d: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\quad \lambda \in \mathbb{R}$

b) $y = 0$: $\begin{cases} x = 3 + \lambda \\ 0 = 1 - 2\lambda \end{cases}$

$2x = 6 + 2\lambda$

$+ \quad 0 = 1 - 2\lambda$

$2x = 7 \Rightarrow x = \frac{7}{2}$

Intersection avec Oy: $(\frac{7}{2}; 0)$

$x = 0$: $\begin{cases} 0 = 3 + \lambda \\ y = 1 - 2\lambda \end{cases}$

$0 = 6 + 2\lambda$

$+ \quad y = 1 - 2\lambda$

$y = 7$

intersection avec Oy: $(0; 7)$

Exercice 13

a) $\lambda = 0 \Rightarrow A(3; -1)$ / $\lambda = 1 \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow B(5; 4)$

$\lambda = 2 \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + 4 \\ -1 + 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix} \Rightarrow C(7; 9)$

b) par exemple $A(3; 0)$, $B(5; 8)$ et $C(7; 10)$

c) $d: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\quad Ox: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad Oy: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \theta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Intersection avec Ox:

$\begin{cases} 3 + 2\lambda = \mu \\ -1 + 5\lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow 5\lambda = 1 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{5}$

$3 + 2 \cdot \frac{1}{5} = \mu \Rightarrow \mu = \frac{17}{5}$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \frac{17}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{17}{5} \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow I_1(\frac{17}{5}; 0)$

Intersection avec Oy:

$\begin{cases} 3 + 2\lambda = 0 \Rightarrow 2\lambda = -3 \Rightarrow \lambda = -\frac{3}{2} \\ -1 + 5\lambda = \theta \end{cases}$

$\Rightarrow -1 + 5 \cdot (-\frac{3}{2}) = \theta \Rightarrow \theta = -\frac{2}{2} - \frac{15}{2} = -\frac{17}{2}$

$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = -\frac{17}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{17}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow I_2(0; -\frac{17}{2})$