Corrigés détaillés: Équations irrationnelles

exercice 8

a) $3x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$ $\quad D = [0; +\infty[$

b) $x+3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3$ $\quad D = [-3; +\infty[$

c) $2-x \geq 0 \Rightarrow 2 \geq x$ $\quad D =]-\infty; 2[$

d) $4x-2 \geq 0 \Rightarrow 4x \geq 2 \Rightarrow x \geq \frac{1}{2}$ $\quad D = [\frac{1}{2}; +\infty[$

e) $x^2-4 \geq 0 \Rightarrow (x+2)(x-2) \geq 0$ $\quad D =]-\infty; -2] \cup [2; +\infty[$

		-2		2	
$x+2$	−	0	+		+
$x-2$	−		−	0	+
$P(x)$	+	0	−	0	+

f) $x^2-3x+2 \geq 0 \Rightarrow (x-2)(x-1) \geq 0$ $\quad D =]-\infty; 1] \cup [2; +\infty[$

		1		2	
$x-2$	−		−	0	+
$x-1$	−	0	+		+
$P(x)$	+	0	−	0	+

exercice 9

Les domaines de définition ont été calculé à l'ex 1.

a) $D = [0; +\infty[$

$\sqrt{3x} = 7$ | élever au carré

$3x = 49$ | $:3$

$x = \frac{49}{3} \in D$

Vérification : $\sqrt{3 \cdot \frac{49}{3}} = \sqrt{49} = 7$ ✓ $\quad S = \{\frac{49}{3}\}$

b) $D = [-3; +\infty[$

$\sqrt{x+3} + x = -5$ | $-x$

$\sqrt{x+3} = -x-5$ | élever au carré

$x+3 = (-x-5)^2$ | CL

$x+3 = x^2 + 10x + 25$ | $-x-3$

$0 = x^2 + 9x + 22$

$\Delta = 9^2 - 4 \cdot 1 \cdot 22 = 81 - 88 < 0 \quad \Rightarrow S = \varnothing$

c) $D = [\frac{1}{2}; +\infty[$

$-\sqrt{4x-2} = -x+2$ | élever au carré

$4x-2 = (-x+2)^2$ | CL

$4x-2 = x^2 - 4x + 4$ | $-4x+2$

$0 = x^2 - 8x + 6$

$\Delta = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 64 - 24 = 40 \qquad \sqrt{\Delta} = \sqrt{40} = \sqrt{4 \cdot 10} = 2\sqrt{10}$

$x_{1,2} = \frac{8 \pm 2\sqrt{10}}{2} = \frac{2(4 \pm \sqrt{10})}{2} = 4 \pm \sqrt{10}$ → $x_1 = 4+\sqrt{10}$, $x_2 = 4-\sqrt{10}$

Vérification:

$-\sqrt{4(4+\sqrt{10})-2} \stackrel{?}{=} -(4+\sqrt{10})+2$ ✓

$-\sqrt{4(4-\sqrt{10})-2} \stackrel{?}{\neq} -(4-\sqrt{10})+2$ ✗

$S = \{4+\sqrt{10}\}$

d) $D =]-\infty; -2] \cup [2; +\infty[$

$\sqrt{x^2-4} = 0$ | élévation au carré

$x^2 - 4 = 0$ | factorisation

$(x-2)(x+2) = 0$

↙ $x = 2$ ↘ $x = -2$

Vérification: $\sqrt{2^2-4} = 0$ ✓ $\qquad \sqrt{(-2)^2-4} = 0$ ✓

$S = \{-2; 2\}$

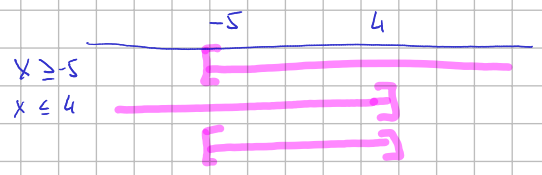
exercice 10

a) $\sqrt{x+5} = \sqrt{4-x}$

Domaine de définition:

$x+5 \geq 0$ et $4-x \geq 0$

$x \geq -5$ $\quad 4 \geq x$



$\mathbb{D} = [-5; 4]$

$\sqrt{x+5} = \sqrt{4-x}$ | élever au carré

$x+5 = 4-x$ | $-5+x$

$2x = -1$ | $:2$

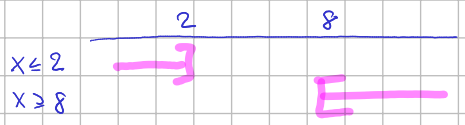
$x = -\frac{1}{2}$

Vérification: $\sqrt{-\frac{1}{2}+5} \overset{?}{=} \sqrt{4-\left(-\frac{1}{2}\right)}$ ✓ $\quad S = \{-\frac{1}{2}\}$

b) $\sqrt{2-x} = \sqrt{x-8}$

Domaine de définition: $2-x \geq 0$ et $x-8 \geq 0$

$2 \geq x$ $\quad x \geq 8$



il n'y a pas d'intersection, donc $\mathbb{D} = \emptyset$

et $S = \emptyset$

c) $\sqrt{1-x} = 5$

$1-x \geq 0 \Rightarrow 1 \geq x$ $\quad \mathbb{D} =]-\infty; 1]$

$\sqrt{1-x} = 5$ | élever au carré

$1-x = 25$ | -1

$-x = 24$ | $\cdot(-1)$

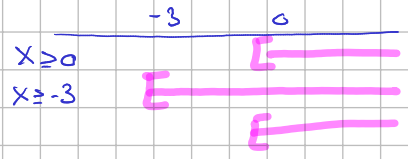
$x = -24$

Vérification: $\sqrt{1-(-24)} \overset{?}{=} 5$ ✓ $\quad S = \{-24\}$

d) $\sqrt{3x} - \sqrt{3+x} = 0$

Domaine de définition: $3x \geq 0$ et $3+x \geq 0$

$x \geq 0$ $\quad$ $x \geq -3$



$\mathbb{D} = [0; +\infty[$

$\sqrt{3x} - \sqrt{3+x} = 0$ $\quad$ | CL

$\sqrt{3x} = \sqrt{3+x}$ $\quad$ | élever au carré

$3x = 3+x$ $\quad$ | $-x$

$2x = 3$ $\quad$ | $:2$

$x = \frac{3}{2}$

Vérification:

$\sqrt{3 \cdot \frac{3}{2}} - \sqrt{3+\frac{3}{2}} \stackrel{?}{=} 0$

$\sqrt{\frac{9}{2}} - \sqrt{\frac{6}{2}+\frac{3}{2}} \stackrel{?}{=} 0$ ✓

$S = \{\frac{3}{2}\}$

e) $\sqrt{x^2+5} = x+2$

$\mathbb{D} = \mathbb{R}$, car $x^2 \geq 0$ et donc $x^2+5 \geq 5$

$\sqrt{x^2+5} = x+2$ $\quad$ | élever au carré

$x^2+5 = (x+2)^2$ $\quad$ | CL

$x^2+5 = x^2+4x+4$ $\quad$ | $-x^2$

$5 = 4x+4$ $\quad$ | -4

$1 = 4x$ $\quad$ | $:4$

$x = \frac{1}{4}$

$S = \{\frac{1}{4}\}$

Vérification:

$\sqrt{(\frac{1}{4})^2+5} \stackrel{?}{=} \frac{1}{4}+2$

$\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{80}{16}} \stackrel{?}{=} \frac{1}{4}+\frac{8}{4}$

$\sqrt{\frac{81}{16}} = \frac{9}{4}$ ✓

f) $x = 3\sqrt{x^2-64}$

Domaine de définition:

$x^2 - 64 \geq 0 \Leftrightarrow (x-8)(x+8) \geq 0$

		−8		8	
$x-8$		−	−	0	+
$x+8$		−	0	+	+
		+	0	−	0	+

$\mathbb{D} =]-\infty; -8] \cup [8; +\infty[$

$x = 3\sqrt{x^2-64}$	élever au carré
$x^2 = 9 \cdot (x^2-64)$	CL
$x^2 = 9x^2 - 576$	$-9x^2$
$-8x^2 = -576$	$: (-8)$
$x^2 = 72$	-72
$x^2 - 72 = 0$	

$\Delta = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-72) = 288$ $\qquad \sqrt{288} = \sqrt{36 \cdot 4 \cdot 2} = 6 \cdot 2\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$

$x_{1,2} = \frac{0 \pm 12\sqrt{2}}{2} = \pm 6\sqrt{2}$ $\quad \nearrow x_1 = 6\sqrt{2}$ $\quad \searrow x_2 = -6\sqrt{2}$

Vérification: $6\sqrt{2} \stackrel{?}{=} 3 \cdot \sqrt{(6\sqrt{2})^2 - 64}$

$= 3 \cdot \sqrt{36 \cdot 2 - 64}$

$= 3 \cdot \sqrt{72 - 64}$

$= 3 \cdot \sqrt{8}$

$= 3 \cdot 2\sqrt{2}$

$= 6\sqrt{2}$ ✓

$-6\sqrt{2} \stackrel{?}{=} \sqrt{(-6\sqrt{2})^2 - 64}$

$\neq 6\sqrt{2}$

$S = \{6\sqrt{2}\}$

exercice 11

a) $D =]-\infty ; 2]$

$\sqrt{2-x} = 2x$ | élever au carré

$2-x = (2x)^2$ | Cl

$2-x = 4x^2$ | $+x-2$

$0 = 4x^2 + x - 2$

$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-2) = 1 + 32 = 33$ $\qquad \sqrt{\Delta} = \sqrt{33}$

$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{33}}{2 \cdot 4} = \frac{-1 \pm \sqrt{33}}{8}$ $\quad x_1 = \frac{-1+\sqrt{33}}{8}$ $\quad x_2 = \frac{-1-\sqrt{33}}{8}$

Vérification:

$\sqrt{2 - \left(\frac{-1+\sqrt{33}}{8}\right)} \stackrel{?}{=} 2 \cdot \left(\frac{-1+\sqrt{33}}{8}\right)$ ✓ $\qquad \sqrt{2 - \left(\frac{-1-\sqrt{33}}{8}\right)} \neq 2 \cdot \left(\frac{-1-\sqrt{33}}{8}\right)$

$S = \left\{\frac{-1+\sqrt{33}}{8}\right\}$

b) $D =]-\infty ; 1] \cup [2 ; +\infty[$

$\sqrt{x^2 - 3x + 2} = 4$ | élever au carré

$x^2 - 3x + 2 = 16$ | -16

$x^2 - 3x - 14 = 0$

$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-14) = 65$ $\qquad \sqrt{\Delta} = \sqrt{65}$

$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{65}}{2}$ $\quad x_1 = \frac{3-\sqrt{65}}{2}$ $\quad x_2 = \frac{3+\sqrt{65}}{2}$

Vérification: $\sqrt{\left(\frac{3-\sqrt{65}}{2}\right)^2 - 3 \cdot \left(\frac{3-\sqrt{65}}{2}\right) + 2} \stackrel{?}{=} 4$ ✓

$\sqrt{\left(\frac{3+\sqrt{65}}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{3+\sqrt{65}}{2}\right) + 2} \stackrel{?}{=} 4$ ✓

$S = \left\{\frac{3-\sqrt{65}}{2} ; \frac{3+\sqrt{65}}{2}\right\}$

c) $\sqrt{x(x+4)} = 2\sqrt{1-x}$

Domaine de définition: $x(x+4) \geq 0$ et $1-x \geq 0$

$x \leq 1$

	-4		0	
x	$-$	$-$	0	$+$
$x+4$	$-$	0	$+$	$+$
	$+$	0	$-$	0 $+$

1

$D =]-\infty; -4] \cup [0; 1]$

$\sqrt{x(x+4)} = 2\sqrt{1-x}$ | élever au carré

$x(x+4) = 4 \cdot (1-x)$ | CL

$x^2 + 4x = 4 - 4x$ | $+4x - 4$

$x^2 + 8x - 4 = 0$

$\Delta = 8^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 64 + 16 = 80$ $\quad \sqrt{\Delta} = \sqrt{80} = \sqrt{4 \cdot 4 \cdot 5} = 2 \cdot 2\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$

$x_{1,2} = \frac{-8 \pm 4\sqrt{5}}{2} = \frac{2(-4 \pm 2\sqrt{5})}{2} = -4 \pm 2\sqrt{5}$

$x_1 = -4 + 2\sqrt{5} \in D$

$x_2 = -4 - 2\sqrt{5} \in D$

Vérification: $\sqrt{(-4+2\sqrt{5})(-4+2\sqrt{5}+4)} \stackrel{?}{=} 2\sqrt{1-(-4+2\sqrt{5})}$ ✓

$\sqrt{(-4-2\sqrt{5})(-4-2\sqrt{5}+4)} \stackrel{?}{=} 2\sqrt{1-(-4-2\sqrt{5})}$ ✓

$S = \{-4-2\sqrt{5}; -4+2\sqrt{5}\}$

d) $4 + 9\sqrt{x^2-9} = 49$

Domaine de définition: $x^2 - 9 \geq 0 \iff (x+3)(x-3) \geq 0$

	-3		3
	$+$	0 $-$	0 $+$

$D =]-\infty; -3] \cup [3; +\infty[$

$4 + 9\sqrt{x^2-9} = 49$ | -4

$9\sqrt{x^2-9} = 45$ | $:9$

$\sqrt{x^2-9} = 5$ | élever au carré

$x^2 - 9 = 25$ | -25

$x^2 - 34 = 0$

$\Delta = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-34) = 136 \qquad \sqrt{136} = \sqrt{4 \cdot 34} = 2\sqrt{34}$

$x_{1,2} = \frac{0 \pm 2\sqrt{34}}{2} = \pm\sqrt{34}$ → $x_1 = -\sqrt{34} \in D$; $x_2 = +\sqrt{34} \in D$

Vérification: $4 + 9\sqrt{(\sqrt{34})^2 - 9} \stackrel{?}{=} 49 \qquad 4 + 9\sqrt{(-\sqrt{34})^2 - 9} \stackrel{?}{=} 49$ ✓

$4 + 9\sqrt{34 - 9} \stackrel{?}{=} 49$

$4 + 9 \cdot \sqrt{25} \stackrel{?}{=} 49$

$4 + 9 \cdot 5 = 49$ ✓

$S = \{-\sqrt{34}; \sqrt{34}\}$

e) $\sqrt{x+8} = \sqrt{2} + \sqrt{6}$

Domaine de définition: $x + 8 \geq 0$ et $2 \geq 0$ ✓ et $8 \geq 0$ ✓

$x \geq -8 \qquad D = [-8; +\infty[$

$\sqrt{x+8} = \sqrt{2} + \sqrt{6}$ | élever au carré

$x + 8 = (\sqrt{2} + \sqrt{6})^2$ | CL

$x + 8 = 2 + 2\sqrt{2}\sqrt{6} + 6$ | CL

$x + 8 = 8 + 2\sqrt{12}$ | -8

$x = 2\sqrt{12} = 2\sqrt{4 \cdot 3} = 2 \cdot 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3} \in D$

Vérification: $\sqrt{4\sqrt{3} + 8} \stackrel{?}{=} \sqrt{2} + \sqrt{6}$ ✓ $\qquad S = \{4\sqrt{3}\}$

$6\sqrt{x} + 7 = 8\sqrt{x} - 9$

f) Domaine de définition: $x \geq 0 \Rightarrow D = [0; +\infty[$

$6\sqrt{x} + 7 = 8\sqrt{x} - 9$ | $-6\sqrt{x} + 9$

$16 = 2\sqrt{x}$ | $:2$

$8 = \sqrt{x}$ | élever au carré

$64 = x \in D$

Vérification: $6\sqrt{64} + 7 \stackrel{?}{=} 8\sqrt{64} - 9$

$6 \cdot 8 + 7 = 8 \cdot 8 - 9$

$48 + 7 = 64 - 9$

$55 = 55$ ✓

$S = \{64\}$

g) $\sqrt{x+243} - \sqrt{x} = \sqrt{x}$

Domaine de définition: $x+243 \geq 0$ et $x \geq 0$

$x \geq -243$ et $x \geq 0$ $\quad D = [0; +\infty[$

$\sqrt{x+243} - \sqrt{x} = \sqrt{x}$	$+\sqrt{x}$
$\sqrt{x+243} = 2\sqrt{x}$	élever au carré
$x + 243 = (2\sqrt{x})^2$	CL
$x + 243 = 4x$	$-x$
$243 = 3x$	$:3$
$x = 81 \in D$	

Vérification : $\sqrt{81+243} - \sqrt{81} \overset{?}{=} \sqrt{81}$

$\sqrt{324} - 9 = 9$

$18 - 9 = 9$ V $\quad S = \{81\}$

h) $x - 4 = \sqrt{5x^2 - 8x}$

Domaine de définition: $5x^2 - 8x \geq 0 \iff x(5x-8) \geq 0$

$x = 0$ $\quad x = \frac{8}{5}$

		0		$\frac{8}{5}$	
x	$-$	0	$+$		$+$
$5x-8$	$-$		$-$	0	$+$
	$+$	0	$-$	0	$+$

$D =]-\infty; 0] \cup [\frac{8}{5}; +\infty[$

$x - 4 = \sqrt{5x^2 - 8x}$	élever au carré
$(x-4)^2 = 5x^2 - 8x$	CL
$x^2 - 8x + 16 = 5x^2 - 8x$	$-5x^2 + 8x$
$-4x^2 + 16 = 0$	

$(4 - 2x)(4 + 2x) = 0$

$4 - 2x = 0$ ou $4 + 2x = 0$

$x = 2 \in D$ $\quad x = -2 \in D$

Vérification: $2 - 4 \overset{?}{=} \sqrt{5 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2}$ $\quad -2 - 4 \overset{?}{=} \sqrt{5 \cdot (-2) - 8 \cdot (-2)}$

$-2 \neq \sqrt{20 - 16}$ $\quad -6 \neq \sqrt{-10 + 16}$ $\quad S = \emptyset$

i) $\sqrt{x^2-49} = x$

Domaine de définition : $x^2 - 49 \geq 0 \Leftrightarrow (x-7)(x+7) \geq 0$

		-7		7	
$x-7$	$-$		$-$	0	$+$
$x+7$	$-$	0	$+$		$+$
	$+$	0	$-$	0	$+$

$D =]-\infty;-7] \cup [7;+\infty[$

$\sqrt{x^2-49} = x$ | élever au carré

$x^2 - 49 = x^2$ | $-x^2$

$-49 \neq 0$

$S = \emptyset$

j) $\sqrt{x} + 3 = \sqrt{x+11}$

Domaine de définition : $x \geq 0$ et $x+11 \geq 0$

$x \geq 0$ et $x \geq -11$ $\quad D = [0;+\infty[$

$\sqrt{x} + 3 = \sqrt{x+11}$ | élever au carré

$(\sqrt{x}+3)^2 = x+11$ | CL

$x + 6\sqrt{x} + 9 = x+11$ | $-x-9$

$6\sqrt{x} = 2$ | $:6$

$\sqrt{x} = \frac{1}{3}$ | élever au carré

$x = \frac{1}{9}$

Vérification : $\sqrt{\frac{1}{9}} + 3 \stackrel{?}{=} \sqrt{\frac{1}{9}+11}$ ✓ $\quad S = \{\frac{1}{9}\}$